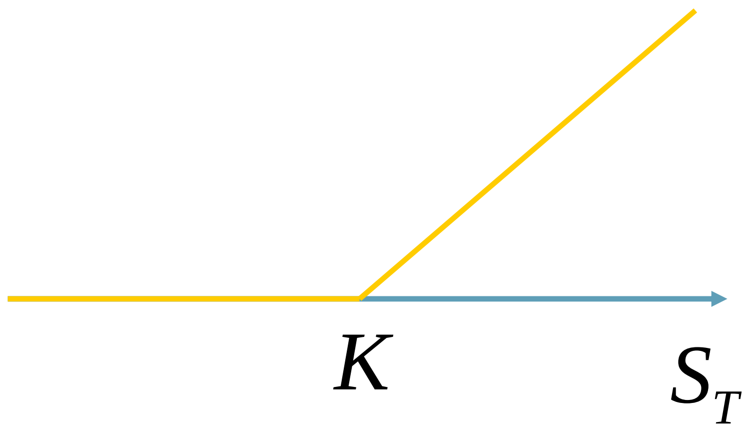
Stochastische Volatilität vs. Traders' Rule of Thumb
Bewertung exotischer Optionen im Vergleich

Uwe Wystup
Universität Trier 21. Juli 2005

Devisenoptionen

- Vanilla
- exotische Optionen

- Vanillaoption
- Recht (aber nicht die Pflicht)
- zur Zeit T
- einen festen Betrag der Währung A
- in einen festen Betrag der Währung B
- umzutauschen
- K=|A|/|B| = Ausübungspreis („Strike“)



Auszahlungsprofil Call

$$\max(0, S_T - K)$$

Optionsbewertung

Kontrakt

- T, K, ...

Markt

- Spot
- Zinsen
- Vols

Modell

- Black-Scholes
- Heston
- ...

Methode

- Formel
- Monte Carlo
- DGL

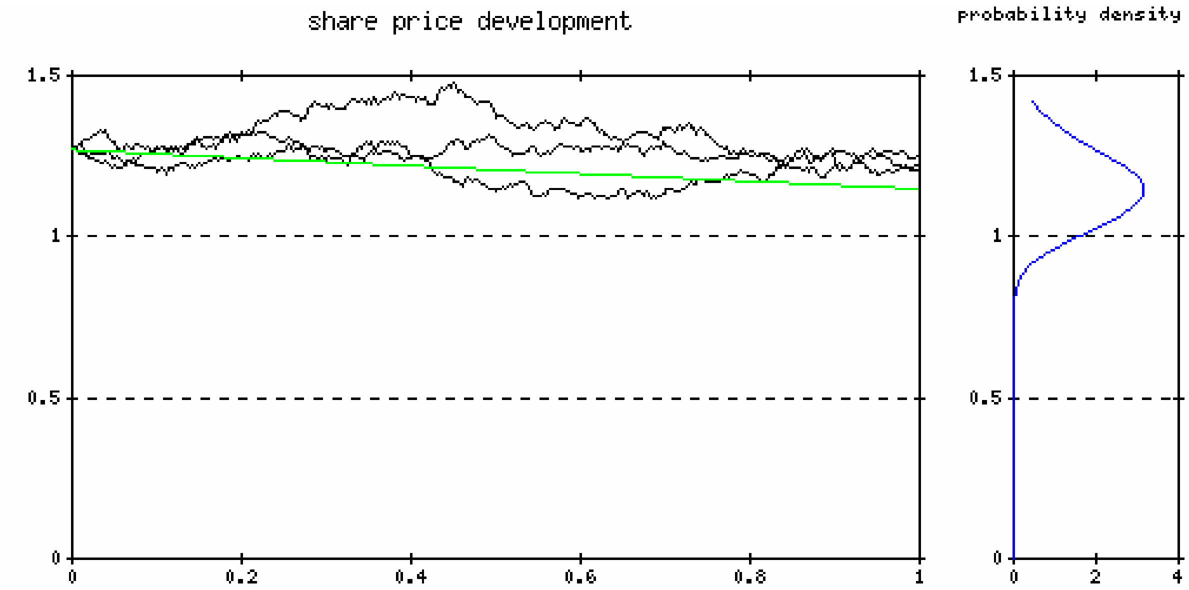
Rechner

- Wert
- Geld/Brief Spanne
- Greeks
- Konfidenzintervalle

Black-Scholes Merton Modell

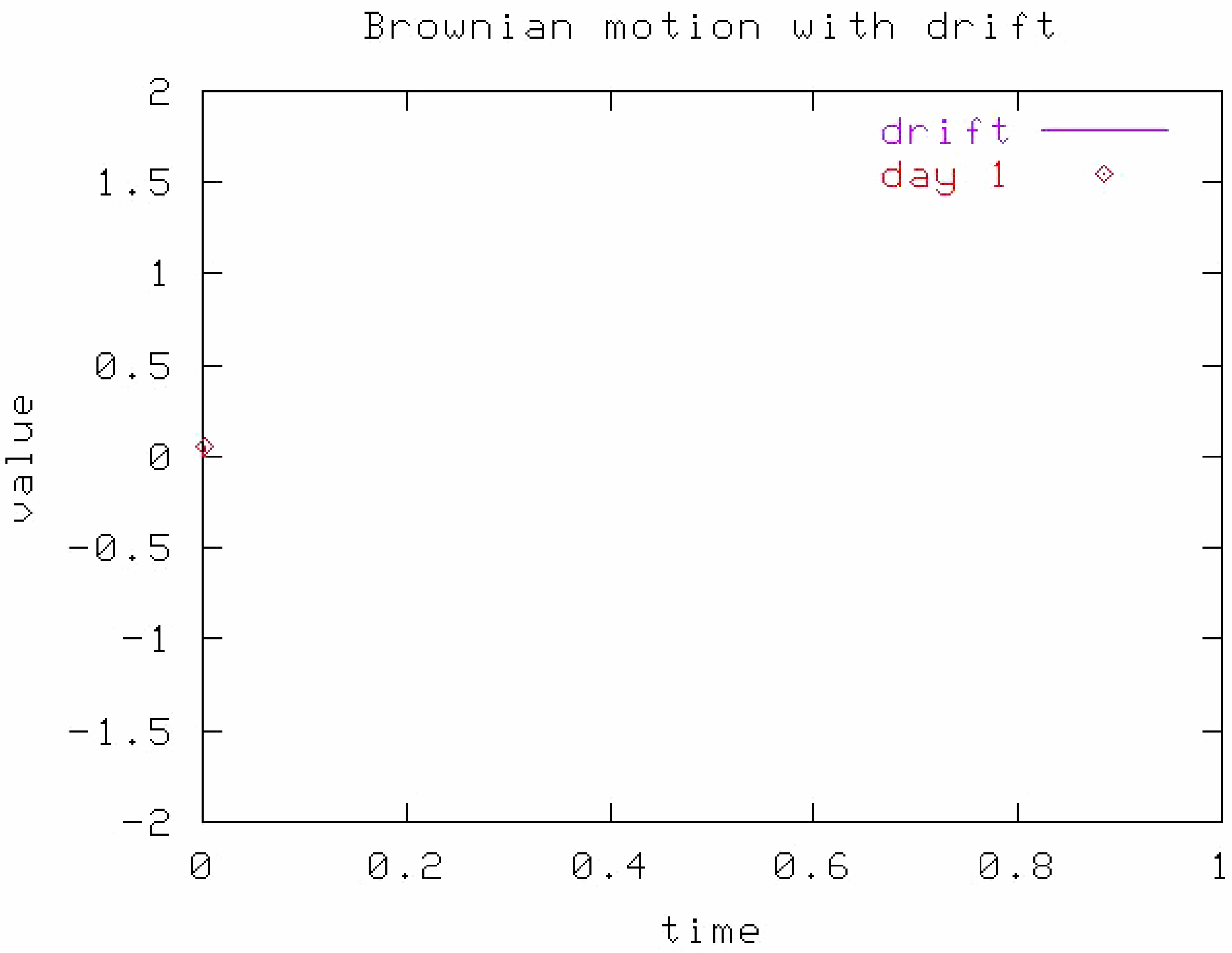
$$dS_t = (r_d - r_f) S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- σ Volatilität
- r_d domestic interest rate
- r_f foreign interest rate
- W_t Brownsche Bewegung
- S_t Wechselkurs zur Zeit t



http://www.mathfinance.de/TinoKluge/tools/sharesim/black_scholes.php

Brownsche Bewegung mit Drift



- Call value $C(t,S)$
- Erfüllt die Differentialgleichung

$$C_t + (r_d - r_f) S C_S + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 C_{SS} - r_d C = 0$$

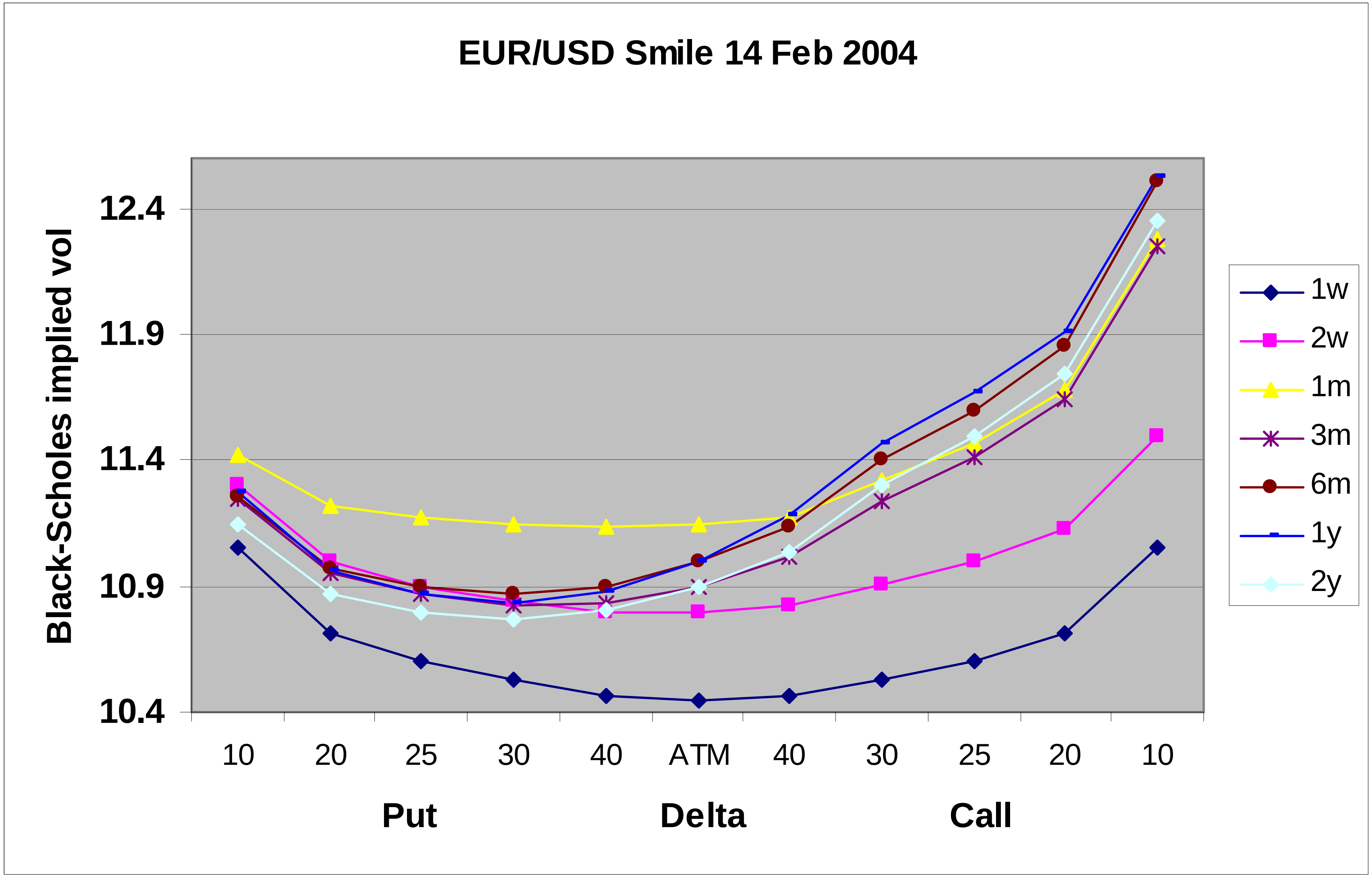
$$C(T,S) = \max(0, S-K)$$

- (Feyman-Kac) Lösung lässt sich schreiben als

$$C(t,S) = e^{-r_d (T-t)} E[\max(0, S_T - K) \mid S_t = S]$$

Smile Effekt im Black-Scholes/Merton Modell

MathFinance

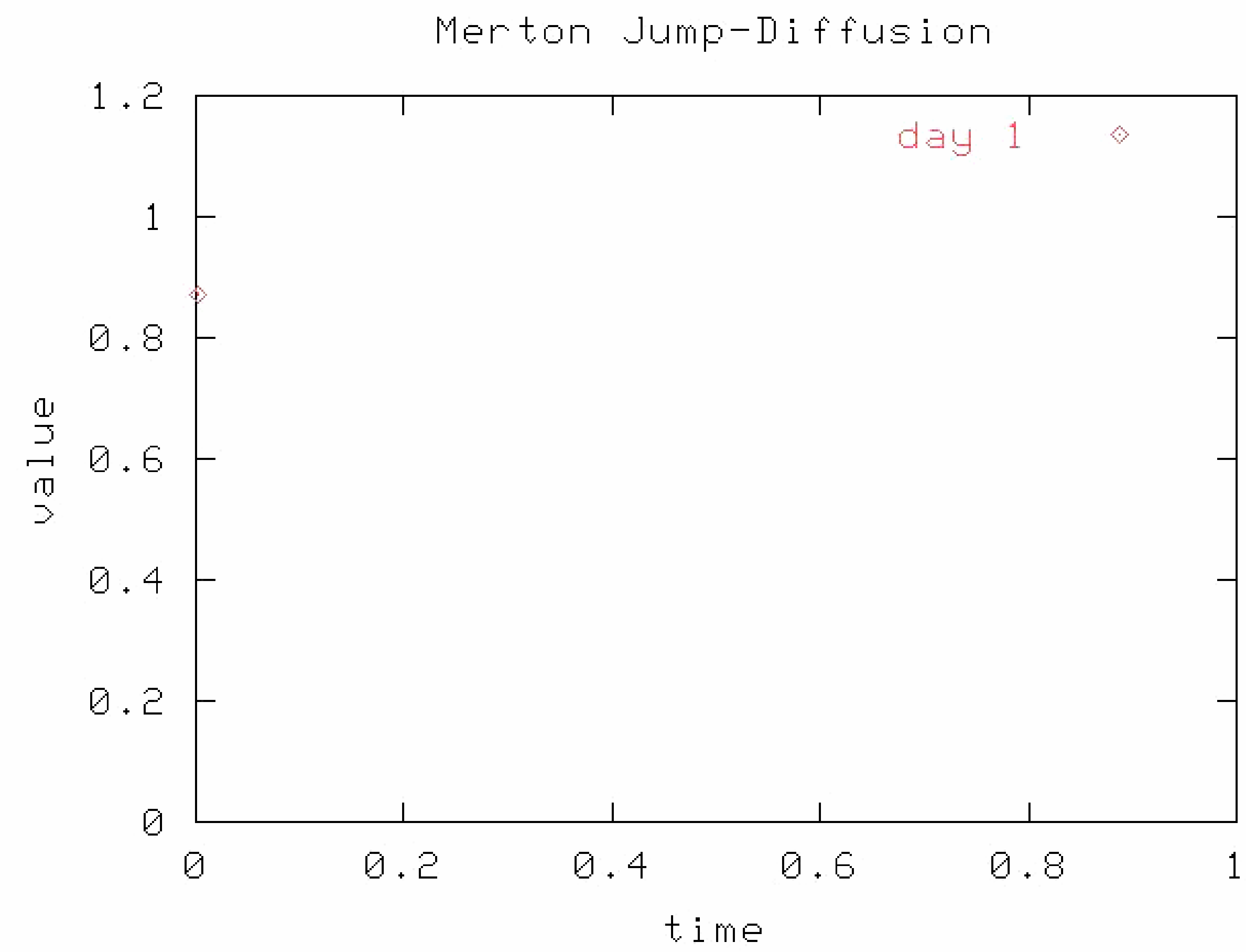


Abhilfen

- Zeitabhängige Volatilität
- Volatilität als Funktion von Zeit und Spot
- Stochastische Volatilität
- Stochastische Zinsen
- Modelle mit Sprüngen
- Stochastische Volatilität + Sprünge
- GARCH Modelle
- Growth Optimal Portfolio als Numeraire
- Unconditional Disturbances
- …

Sprung Prozesse

MathFinance



Stochastische Volatilität

- Hull/White (1987)
- Stein/Stein (1991)
- Heston (1993)
- Schöbel/Zhu (1998)
- Hagan (2000)
- ...

Heston Modell

- σ Instantane Volatilität
- κ Mean reversion speed
- θ Langfristige instantane Varianz
- ζ Volatilität der Volatilität
- ρ Korrelation

$$dS_t = (r_d - r_f)S_t dt + \sigma S_t dW_t^1$$

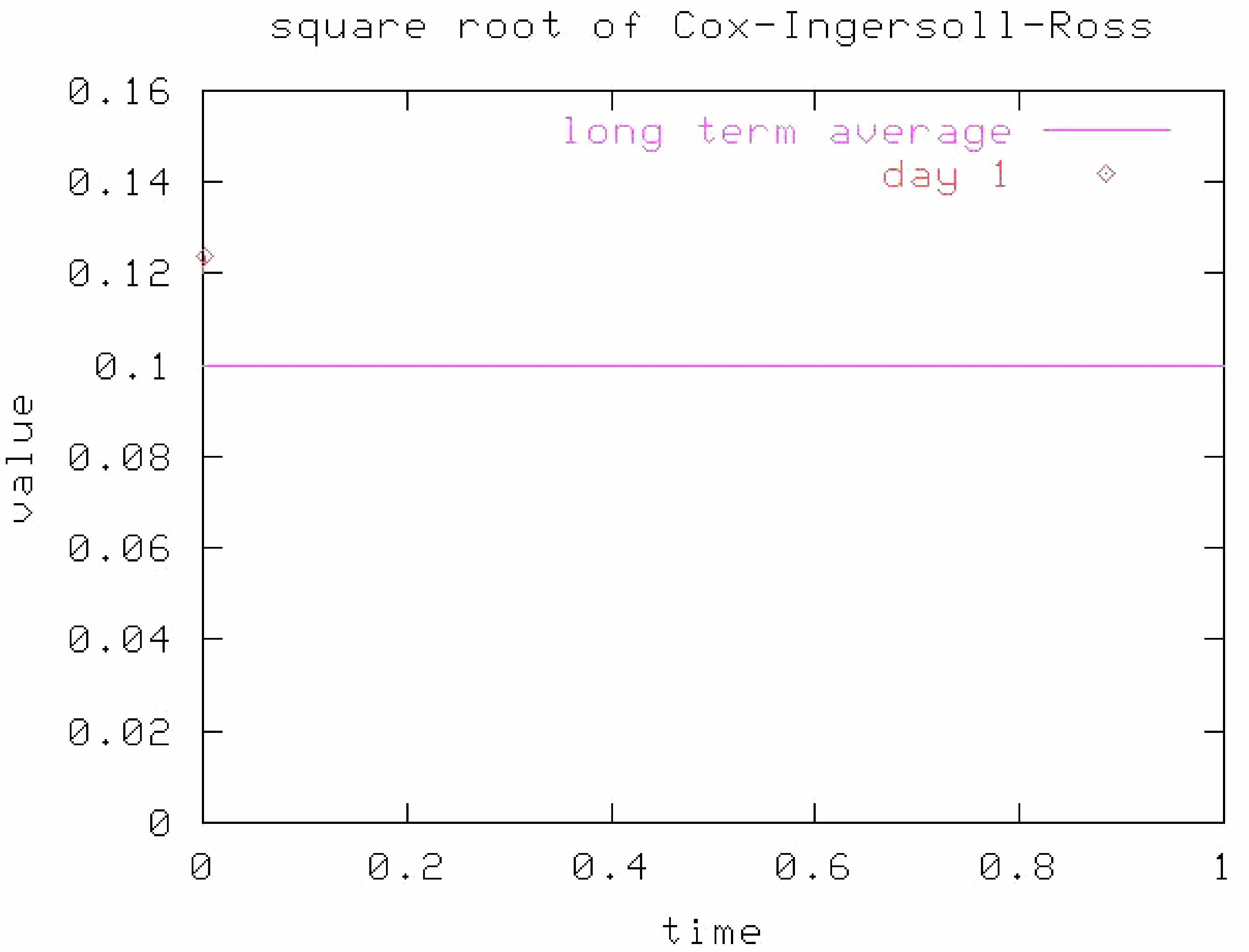
$$\sigma = \sqrt{V}$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \zeta\sqrt{V_t}\,dW_t^2$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$$

Heston Modell

MathFinance



Heston Modell

- Call value $H(t,S,\sigma)$
- Erfüllt die Differentialgleichung

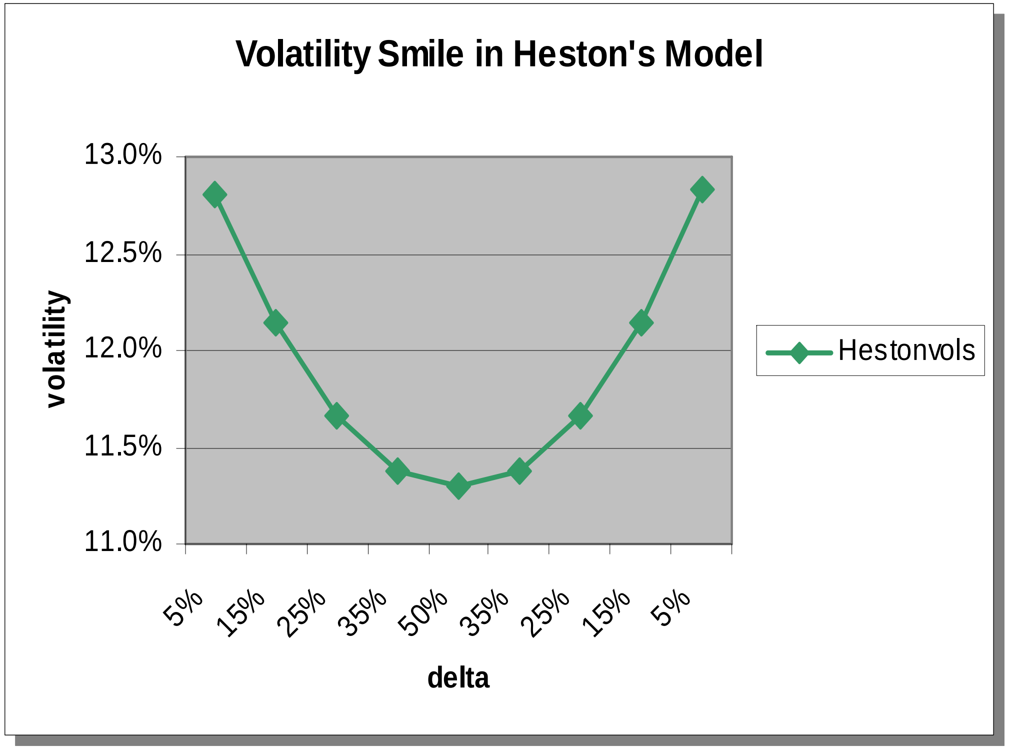
$$H_t + (r_d - r_f) S H_S + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 H_{SS} - r_d H$$

$$+ \frac{1}{2} \sigma^2 V H_{VV} + \rho S \sigma V H_{VS} + [\kappa(\theta - V) - \lambda V] H_V = 0$$

Was spricht für Hestons Modell ?

MathFinance

- Implementierbarkeit
- Abdeckung der Produktpalette
- Erklärbarkeit von Marktpreisen



Beispiel: One-touch

- Zahlt einen festen Betrag einer vereinbarten Währung (EUR oder USD), falls der EUR/USD Kurs während der Laufzeit irgendwann eine Schranke trifft oder überschreitet
- Kostet zwischen 0% und 100% des Nominals
- Je näher der Kassakurs an der Schranke, desto teurer der one-touch
- Nominal ist zahlbar bei Fälligkeit (standard) oder beim ersten Treffen der Schranke
- Preis oft weit entfernt vom theoretischen Wert, warum?
- Kosten aus dem Risikomanagement

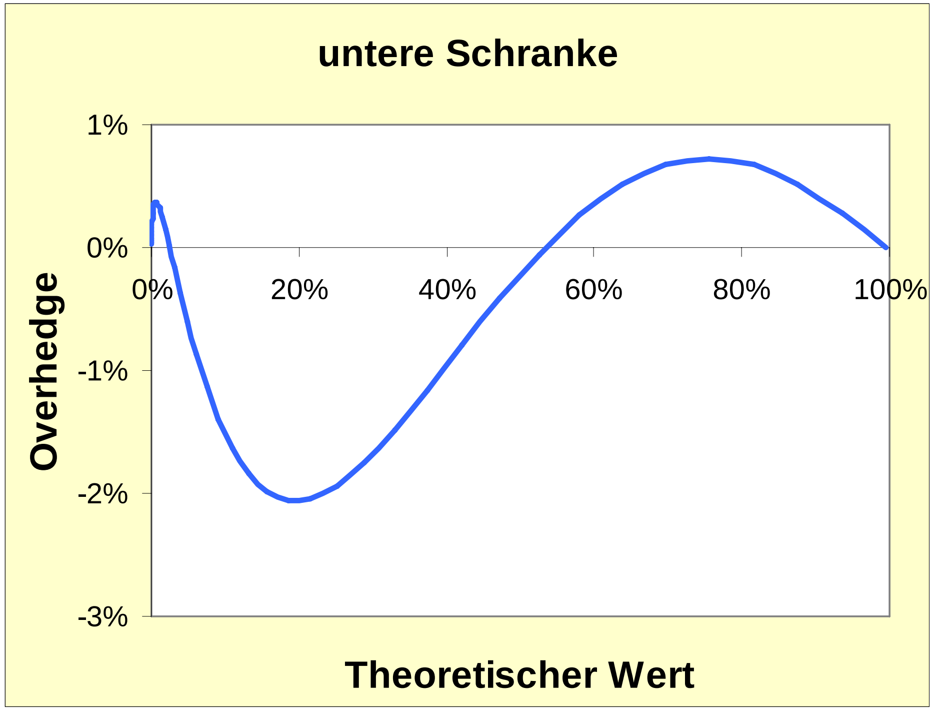
Exkurs: Treffereignis

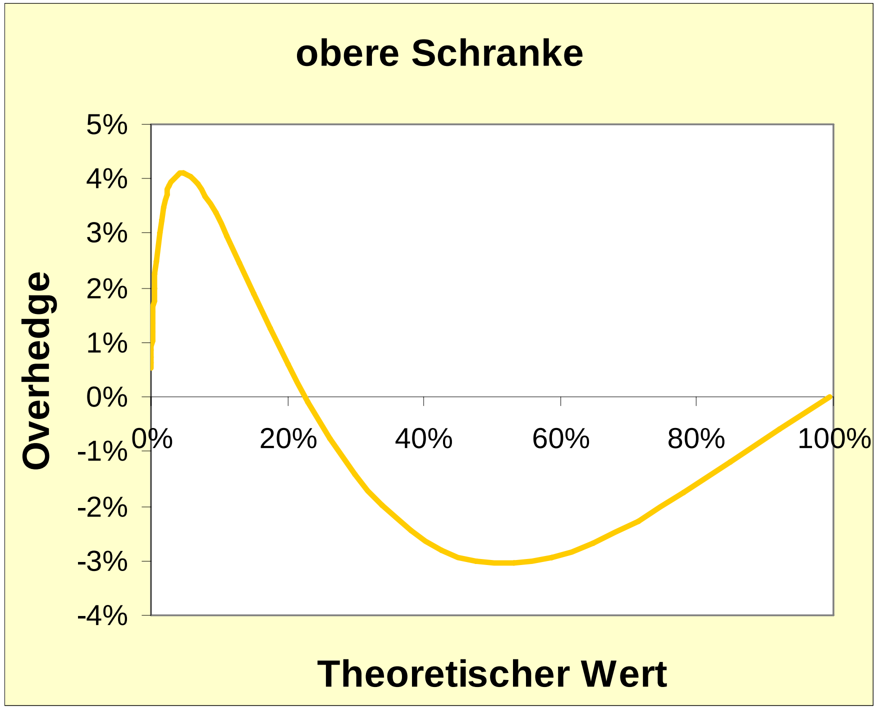
- Ein Kurs an oder jenseits der Schranke muss am internationalen Devisenmarkt gehandelt worden sein
- Transaktionen gelten zu jeder Zeit zwischen Montags 5:00 Uhr (Sydney) und Freitags 17:00 Uhr in New York.
- Gehandelten Betrag muss von kommerzieller Größe sein, in der Regel mindestens 3 Mio USD
- Details im *International Currency Options Master Agreement (ICOM)* (**http://www.ny.frborg/fxc/fxann000217.html**)

One-touch

MathFinance

- Preis oft weit entfernt vom theoretischen Wert (TV), warum?
- Kosten aus dem Risikomanagement (Overhedge)
- Beispiele mit oberer/unterer Schranke





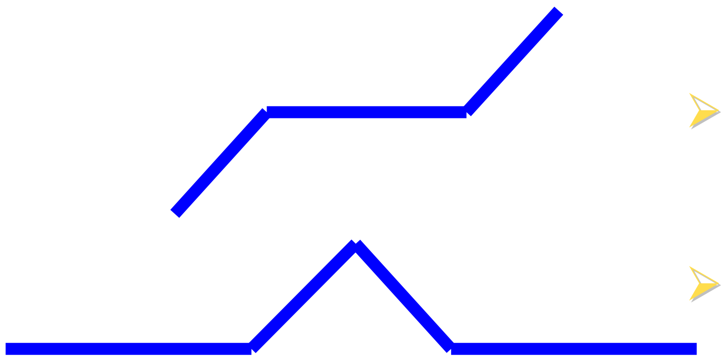
Marktdaten: EUR/USD 17. Juli 2002 1,0045 EUR 3,33% USD 1,76%, 3 M ATM vol 11,85%, RR 1,25%, BF 0,25%

Wie funktioniert marktgerechte Bewertung ?

- **Marktpreis einer Option**
- **= Theoretischer Wert**
- **+ p • Vanna der Option • Wert RR / Vanna RR**
- **+ p • Volga der Option • Wert BF / Volga BF**

- **RR: Risk Reversal**
- **BF: Butterfly**
- **p: Wahrscheinlichkeit, dass der Hedge gebraucht wird**

Butterfly und Risk Reversal



- Risk Reversal: long call + short put
- Butterfly besteht aus vier Vanilla Optionen

OTM put - ATM put - ATM call + OTM call

→ BF = ½(OTMcallvol + OTMputvol) - ATMvol

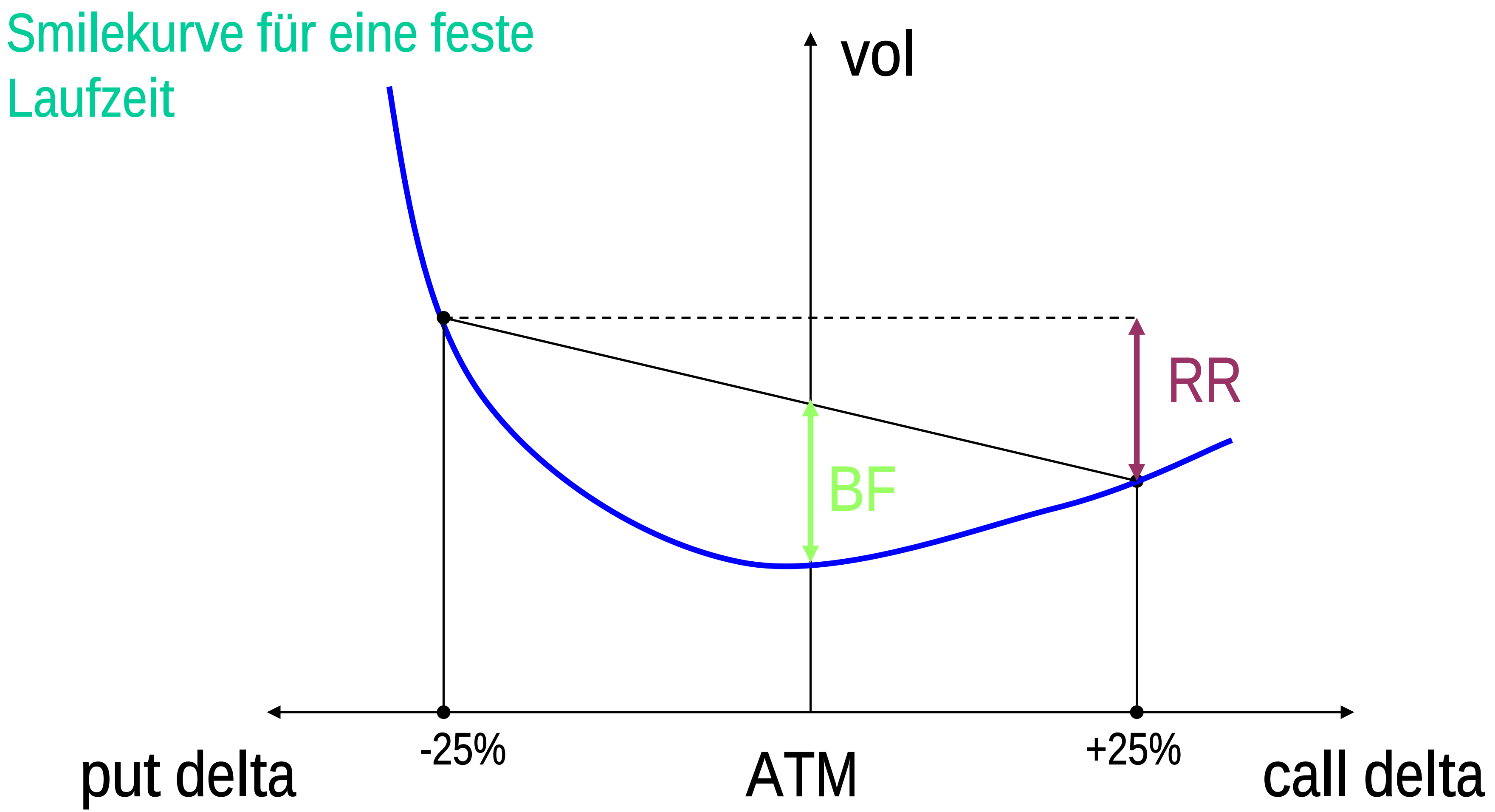
0,8 = ½(9,8 + 10,2) - 9,2

→ RR = OTMcallvol - OTMputvol

-0,4 = 9,8 - 10,2

Butterfly und Risk Reversal

MathFinance



Wie funktioniert marktgerechte Bewertung ?

- **Beispiel: USD/JPY 1-Jahres one-touch bei 127.00 mit Nominal in USD**
- **Marktdaten: Kasse 117.00, Volatilität 8.80%, USD Zins 2.10%, JPY Zins 0.10%, 25Delta RR -0.45%, 25 Delta BF 0.37%**
- **TV: 38.2%**
- **Vanna: -9.0**
- **Volga: -1.0**

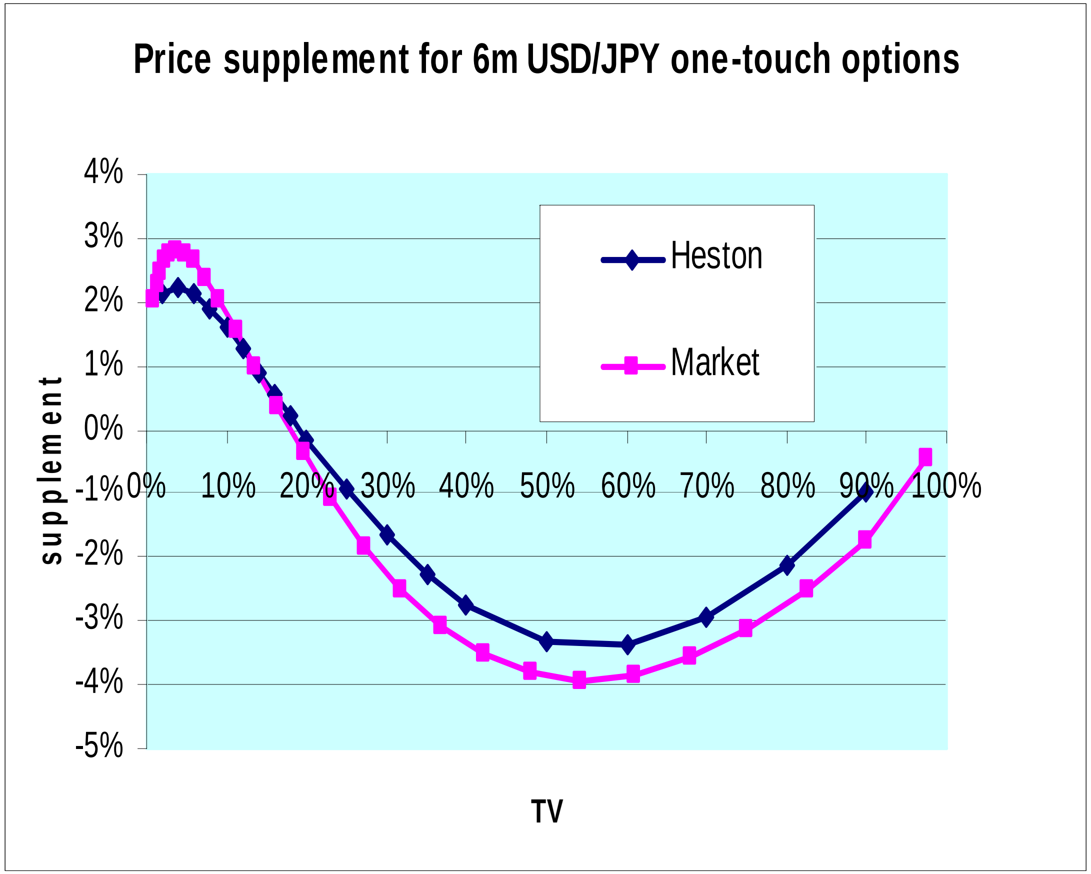
Wie funktioniert marktgerechte Bewertung ?

- **Marktpreis einer Option**
- **= TV**
- **+ p • Vanna der Option • Wert RR / Vanna RR**
- **+ p • Volga der Option • Wert BF / Volga BF**

- **Beispiel USD/JPY one-touch**
- **= 38,2%**
- **+ p • [-9,0 • (-0,15%) / 4,5]**
- **+ p • [-1,0 • 0.27 / 0,035]**
- **= 38,2% + p • [0,3% - 7,7%]**
- **= 38,2% - p • 7,4%**

- **Treff-Wahrscheinlichkeit: 38,2%**
- **Hedge muss mit Wahrscheinlichkeit 38,2% aufgelöst werden**
- **Also p = 100% - 38,2% = 61,8%**
- **Gesamt-Overhedge: 61,8% • -7.4% = -4.6%**
- **Marktpreis: 38.2% - 4.6% = 33.6%**
- **Geld/Brief: 32% / 35%**
- **Hedge: Verkaufe 2 RR und 28 BF**

Heston vs. Markt beim One-Touch



Links

- http://www.mathfinance.de OptionPricer, Heston Vanilla Code
- http://www.mathfinance.de/TinoKluge/ Share Simulator
- http://www.superderivatives.com FX vols und exotics
- http://www.mathfinance.de/wystup/papers/OT_derivativesweek.pdf Market Price of One-touch options in FX
- http://ise.wiwi.hu-berlin.de/~mdstat/scripts/stf/html/ Statistical Tools in Finance and Insurance
- http://www.mathfinance.de/FXRiskBook/ Foreign Exchange Risk
- http://kluge.in-chemnitz.de//download/hfb/ Animationen
- http://www.mathfinance.de/wystup/papers.html Diese Präsentation

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Uwe Wystup
MathFinance AG
http://www.mathfinance.de
Tel/Fax +49-700-MATHFINANCE
E-Mail: uwe.wystup@mathfinance.de