Foto: Philipp Horak/Anzenberger

Die Weltformel des Kapitalismus

Finanzmathematik im Selbstversuch

VON ROBERT VON HEUSINGER

Woher weiß ich, ob sich mein Geld besser vermehrt in meinem Sparkonto, wenn ich es in Aktien anlege? Welche Verluste kann ich mir bei meinen persönlichen Finanzen leisten? Wie messe ich Risiko überhaupt, das ich eingehe?

Es gibt eine ehrliche und eine pragmatische Antwort auf diese Fragen. Zunächst die ehrliche: Niemand kann das Risiko von Investitionen am Kapitalmarkt prognostizieren. Und niemand weiß, ob Aktien langfristig das Sparbuch schlagen werden. Der simple Grund: Die Zukunft ist ungewiss.

Dennoch zeigen langfristige Vergleiche, dass ein höheres Risiko in der Regel durch höhere Erträge belohnt wird. Deshalb beantworten die Pragmatiker die oben gestellten Fragen mittels einer mathematischen Formel. Es handelt sich um die Formel der Gaußschen Normalverteilung, der mächtigsten Formel des globalen Kapitalismus. Mit ihr versuchen die Vermögensverwalter in New York genau wie in Shanghai oder Frankfurt, die Verlustanfälligkeit der Portefeuilles zu reduzieren; mit ihr kalkulieren die Banken in Paris, Sydney und São Paolo die Risikopositionen in ihrer Bilanz; mit ihr gehen die Finanzpolizisten weltweit auf die Jagd nach Hasardeuren.

Die Formel ist gar nicht so kompliziert, wie sie im ersten Moment erscheint. Sie soll im Folgenden kurz erklärt werden – und zum Selbstversuch verlocken.

Aufgabenstellung: Sie erben 20 000 Euro. Mit dem Geld würden Sie gern in zwei Jahren ein neues Auto kaufen. Was so lange mit dem Geld tun? Sicher auf dem Tagesgeldkonto schlummern lassen zu drei Prozent Zinsen? Oder riskant in Aktien investieren und sieben bis neun Prozent erwarten dürfen? Klar ist: Wer sich für Aktien entscheidet, muss auch Verluste ertragen können.

Frage: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach zwei Jahren Anlage am Aktienmarkt mindestens 18 000 Euro aus der Erbschaft übrig bleiben?

Berechnung: Um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen, muss man zunächst die pragmatische, wenngleich etwas unrealistische Annahme treffen, die Verteilungsfunktion für den Dax sei lognormalverteilt, die Rendite normalverteilt. Mathematisch ausgedrückt sieht das dann so aus:

Annahme $\ln\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right)$ ist normalverteilt.

Dax(2) drückt dabei die Verteilung des Dax-Standes in zwei Jahren aus, Dax(0) den aktuellen Dax-Stand.

In den nächsten Schritten gilt es, den Erwartungswert und die Varianz des Dax zu bestimmen. Die Varianz ist in der Statistik ein Streuungsmaß, ein Maß für die Abweichung der Dax-Stände von ihrem Erwartungswert. Der Erwartungswert ist die zu erwartende Dax-Rendite r. Sie wird aus Daten der Vergangenheit ermittelt. In der Beispielsrechnung basiert sie auf der jüngsten Zehnjahresperiode. Am 3. Mai 1995 schloss der Dax bei 2.2464 Zählern, am 3. Mai dieses Jahres bei 5.969 Punkten.

Nährungsweises Schätzen von r:

$$2464 \times (1+r)^{10} = 5696$$
$$1+r = \sqrt[10]{5696 : 2464}$$
$$= \sqrt[10]{2,3117}$$
$$= 1,0874$$
$$r = 8,74\ \%$$

Bei der Varianz kann man entweder die historische Schwankung des Dax verwenden oder die aktuell am Markt abzulesende. Die Deutsche Börse berechnet die Volatilität mit ihrem Index VDax-New. Diese aktuelle Volatilität wird hier zur Bestimmung der Varianz herangezogen. Der VDax-New notierte am 3. Mai dieses Jahres bei 15,57, was 15,57 Prozent erwarteter Schwankung pro Jahr entspricht. Der Nachteil der Varianz: Sie besitzt eine andere Einheit als die Daten.Deshalb verwendet man lieber die Standardabweichung, die als Quadratwurzel aus der Varianz definiert ist.

Die Verteilungsfunktion des lognormalverteilten Dax in zwei Jahren wird mathematisch folgendermaßen ausgedrückt:

$$\ln\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right)$$

Varianz von $\ln\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right)$

$$\sigma^2 = 2 \times \upsilon^2$$
$$\sigma^2 = 2 \times (0,1557)^2 = 0,04974$$
$$\sigma = 0,2230$$

Zwischenergebnis:
Die Verteilung der Dax-Rendite in zwei Jahren

$$\ln\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right)$$

ist normalverteilt mit Mittelwert r = 8,74% und Standardabweichung σ = 0,2230 = 22,30%

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit (Ws), bei einer Vollinvestition der 20 000 Euro in den Dax (Dax(0)) nach zwei Jahren noch mindestens 18 000 Euro zu besitzen?

Nebenrechnung: $\frac{18000}{20000} = 0,9$

$$Ws\ (DAX(2) \geq DAX(0) \times 0,9)$$

$$= Ws\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right) \geq 0,9$$

Diese Ungleichung muss nun logarithmiert werden.

$$= Ws\left(\ln\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right) \geq \ln(0,9)\right)$$

$$= Ws\left(\ln\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right) \geq -0,1054\right)$$

Die Verteilung für den Dax $\ln\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right)$

ist normalverteilt mit Mittelwert r = 8,74% und Standardabweichung σ = 0,2230 = 22,30%. Dafür gibt es aber keine Daten in Formelsammlungen, auf Taschenrechnern oder üblichen Programmbibliotheken. Deshalb muss diese Verteilung standardisiert werden. Beim Standardisieren wird die Verteilung des Dax auf Norm gebracht mit dem Mittelwert 0 und der Standardabweichung l. Das geht wie folgt:

$$\frac{\ln\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right) - r}{\sigma}$$ ist normal verteilt mit Mittelwert 0 und Std. Abw. 1

$$= Ws\left[\frac{\ln\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right) - r}{\sigma} \geq \frac{-0,1054 - r}{\sigma}\right]$$

$$= 1 - Ws\left[\frac{\ln\left(\frac{DAX(2)}{DAX(0)}\right) - r}{\sigma} \leq \frac{-0,1054 - r}{\sigma}\right]$$

Hier die Werte für r und σ einsetzen

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-0,1054 - 0,0874}{0,2230}\right)$$

Das Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Es befindet sich auf guten Taschenrechnern, in Formelsammlungen oder auf Excel (Befehl: standnormvert)

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-0,1928}{0,2230}\right)$$
$$= 1 - \Phi(-0,8646)$$
$$= 1 - 0,1936$$
$$= 0,8064$$
$$= 80,6\ \%$$

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Anlage der Erbschaft am Aktienmarkt in zwei Jahren noch mindestens 18 000 Euro zu besitzen, liegt bei knapp 80,6 Prozent.

Mit derselben Formel lässt sich auch der Value-at-risk berechnen. Der Value-at-risk ist die Summe Geld, die Banken oder Versicherer maximal im Feuer stehen haben – mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 Prozent. In fünf Prozent der Fälle übersteigt der Verlust den Value-at-risk. Um zu dieser Berechnung zu gelangen, muss die Wahrscheinlichkeit auf 95 Prozent festgesetzt werden und nach dem potenziellen Verlust aufgelöst werden.

Aufgabe für den Selbstversuch: Es gelten alle Annahmen wie im obigen Beispiel, also auch der Mittelwert r = 8,74 Prozent und die Standardabweichung σ = 22,3%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweijährige Anlage am Aktienmarkt mehr abwirft als das Tagesgeldkonto (Annahme: Zinssatz über die zwei Jahre konstant 3 Prozent)?

Die Beispiele wurden in Zusammenarbeit mit Uwe Wystup, Professor für Quantitative Finance an der HFB – Business School of Finance and Management, erstellt. Weitere Rechenaufgaben im Internet unter www.zeit.de/finanzen

Lösung: 55 Prozent. Die Zinseszinsformel ergibt als Referenzwert für zwei Jahre Tagesgeldanlage 21 218 Euro. Dieser Wert wird durch 20 000 dividiert und anstelle der 0,9 (18 000/20 000) in der Beispielsrechnung eingesetzt.